

## COMENTARIS SOBRE 'ANALYSE DES INFINIMENT PETITS' DE L'HOSPITAL (1696- 1768): INTERPRETACIÓ I ENSENYAMENT DE CONCEPTES FONAMENTALS DEL CàLCUL DIFERENCIAL

**SANDRA BELLA;<sup>1</sup> MÒNICA BLANCO<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> UNIVERSITÉ DE NANTES; LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES JEAN LERAY  
(NANTES), LABORATOIRE SPHERE (PARIS).

<sup>2</sup> DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

Paraules clau: *L'Hospital, Varignon, Crousaz, Paulian, càlcul diferencial*

### **Commentaries on the 'Analyse des Infiniment Petits' of L'Hospital (1696-1768): Interpretation and Teaching of the Fundamental Concepts of the Differential Calculus**

*Summary: In 1696 the Marquis de L'Hospital (1661-1704) published the 'Analyse des infiniment petits' pour l'intelligence des lignes courbes, the first systematic work on differential calculus. The 'Analyse' played a fundamental role in the circulation and teaching of the Leibnizian calculus. To help readers understand the 'Analyse' three commentaries were subsequently published in France: i) 'Éclaircissements sur l'Analyse des infiniment petits' (Paris, 1725), by Pierre Varignon (1654-1722); ii) 'Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits' (Paris, 1721), by Jean Pierre Crousaz (1663-1750); iii) 'Analyse des infiniment petits, suivie d'un nouveau commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet ouvrage' (Avignon, 1768), by Aimé Henri Paulian (1722-1802). The main aim of this contribution is to show how the authors of these commentaries interpreted and explained some fundamental concepts contained in the 'Analyse', such as the definition of difference and the rule of the product.*

*Key words: L'Hospital, Varignon, Crousaz, Paulian, differential calculus*

## 1. Introducció

Els primers articles utilitzant el nou càlcul de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) són publicats en 1684 i 1686 als *Acta Eruditorum*. Durant la seva estada a París durant l'any 1692, Johann Bernoulli (1668-1748) inicia al càlcul leibnizià un cercle constituït entorn del filòsof Nicolas Malebranche (1638-1715). A més de Malebranche, també pertanyien a aquest cercle Guillaume F. A. Marquès de L'Hospital (1661-1704), Pierre Varignon (1654-1722), entre d'altres.<sup>1</sup> El 1696, L'Hospital va publicar el primer tractat sobre càlcul diferencial: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. La publicació de l'*Analyse* va tenir un paper fonamental en el context del desenvolupament històric del càlcul leibnizià i, en particular, per a la seva difusió i ensenyament. La primera secció està dedicada a enunciar les definicions, les demandes i les regles de la diferenciació. Les altres seccions proposen totes les aplicacions del càlcul conegudes per resoldre problemes relacionats amb corbes: ja siguin els típics de determinació de tangents o de màxims i mínims, o bé els nous problemes, com poden ser la recerca d'evolutes, càustiques i envolupants. Per a aquests últims, el nou càlcul és gairebé l'únic capaç de resoldre'ls de manera general.

La ressenya de l'*Analyse* feta al *Journal des Sçavants* (juny 1696) fa elogis de la manera estructurada i coherent de la presentació que s'hi fa del nou càlcul, però també indica que L'Hospital destina el seu llibre als «connaisseurs». Així doncs, la lectura de l'*Analyse* és considerada des del principi de difícil accés per als no *savants*, tal com es mostra a Bella (2013). Per aquesta raó, per a aclarir aquelles parts de l'*Analyse* que podien resultar més difícils d'entendre, a França es van publicar els tres comentaris següents com a suplement de l'obra de L'Hospital:

- i) *Éclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits* (París, 1725), de Pierre Varignon (1654-1722), basat en les notes de Varignon, però escrit en part probablement poc després de la publicació de l'*Analyse*;
- ii) *Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits* (París, 1721), de Jean Pierre Crousaz (1663-1750), i
- iii) *Analyse des infiniment petits, suivie d'un nouveau commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet ouvrage* (Avignon, 1768), d' Aimé Henri Paulian (1722-1802), publicat amb la tercera edició de l'*Analyse*.

Aquests comentaris explicaven l'obra de L'Hospital, segons enfocaments pedagògics diversos, en un intent de fer-la més entenedora.<sup>2</sup> Tot i reconèixer que l'*Analyse* era una bona obra en general, Crousaz i Paulian consideraven que només s'adreçava als *savants*, de manera que amb els seus comentaris intentaren arribar als principiants d'una forma més pedagògica, tal com es pot llegir als seus prefacis. En canvi, en el cas de Varignon es tractava d'apunts personals per a clarificar el contingut de l'*Analyse* essencialment per als *savants*, potser amb la idea d'afegir-lo com a annex d'una nova edició de l'obra de L'Hospital. La publicació de l'obra de L'Hospital i els posteriors comentaris permeten reconstruir la discussió sobre què es podia considerar com a pedagogia «acceptada» en aquest context específic, prenent aquest terme de Kaiser (2005: 250).

1. Robinet (1960) va fer un estudi excel·lent sobre el cercle de Malebranche i la introducció del càlcul a França.

2. El 1781 apareix una nova edició, revisada i augmentada per Louis Lefèvre-Gineau (1751-1829). Però en aquest cas les notes estan escrites des d'un enfocament proper a Euler, l'estudi de les quals cau fora de l'abast d'aquesta contribució.

Aquesta contribució forma part d'un treball en curs l'objectiu principal del qual és analitzar i comparar la manera com els autors dels comentaris van entendre, interpretar i, posteriorment, ensenyar alguns dels conceptes fonamentals que apareixien a l'*Analyse* de L'Hospital, com ara la definició de diferència, la regla del producte, les diferències d'ordre superior o la determinació de màxims i mínims. En particular, aquesta contribució primer presenta els comentaris de Varignon, Crousaz i Paulian, tot mostrant quina era la motivació darrera de cadascun d'ells, i explorant a partir dels seus prefacis com entenien els autors l'ensenyament del càlcul diferencial. Finalment, s'analitza i es compara com s'exposava la regla del producte als tres comentaris estudiats.

## 2. 'Éclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits' de Varignon (1725)

Pierre Varignon fou educat al *collège* jesuïta de Caen. Des de 1688 fins a la seva mort fou professor de matemàtiques al *collège* Mazarin, i el 1694 obtingué també la càtedra de filosofia grega i llatina al *Collège Royal* de París. Fou nomenat membre l'Acadèmia de Ciències de París el 1688 amb el títol de geòmetra, tot i que es dedicava més aviat a la mecànica. A més de la revisió del text de L'Hospital, en alguns casos els *Éclaircissemens* de Varignon contenen problemes addicionals, proposicions noves i mètodes alternatius. El llibreter Jacques Rollin (1703? - 1768) comprà el manuscrit dels *Éclaircissemens* de Varignon i decidí publicar-lo<sup>3</sup> per «faire présent aux Savans» (Varignon, 1725, *Le Libraire au Lecteur*: 2). Segons Rollin, es tractava de reflexions i recerca de Varignon, per perfeccionar l'*Analyse* (Varignon, 1725, *Le Libraire au Lecteur*: 1). De fet, fou el mateix Rollin qui donà el títol d'*Éclaircissemens* a aquestes notes de Varignon, i qui decidí de publicar-les per separat, de manera independent de l'*Analyse* ja que així «les gens du métier» podrien llegir de manera més còmoda l'*Analyse* tenint el comentari al costat (Varignon, 1725, *Le Libraire au Lecteur*: 3).

## 3. 'Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits' de Crousaz (1721)

El lausanès Jean-Pierre de Crousaz fou professor de filosofia i matemàtiques a l'Acadèmia de Lausane entre 1700 i 1724 i a la Universitat de Groninga entre 1724-1726. Amb gran vocació per ensenyar, Crousaz va publicar diverses obres de matemàtiques, fruit de les seves reflexions sobre l'ensenyament, com per exemple, *Réflexions sur l'utilité des Mathématiques, & sur la manière de les étudier, avec un nouvel essai d'Arithmétique démontrée* (1715), *Nouvelles maximes sur l'éducation des enfants* (1718) i *Traité de l'Éducation des Enfants* (1722).

Cap al 1710 Crousaz s'inicià al càlcul de diferències a partir de l'obra de L'Hospital. Tanmateix, segons Crousaz, la presentació de L'Hospital no facilita l'aprenentatge del càlcul ja que és laconica i plena d'obscuritat. Així ho explica en una carta al seu amic Réaumur el 1719:

Quelquefois il m'a paru qu'elles auraient été plus claires [les propositions] et même plus justes s'il les avaient proposées dans d'autres termes et sous d'autres jours, quelquefois je vous l'avoue il m'a fallu deviner et de temps en temps, il me semble que j'avais plutôt fait de résoudre de moi-même un de ses problèmes, comme j'aurais fait un énigme que d'en apprendre la solution de l'Auteur même. (Crousaz a Réaumur, 2 de febrer 1719)

Això el va portar a preparar el seu *Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits*, precedit de dos discursos, el primer sobre la naturalesa dels infinitament petits, i el segon sobre el càlcul de potències. Al prefaci Crousaz comença exposant les raons que l'havien motivat a escriure el seu *commentaire* sobre l'*Analyse*:

Les Exemples du Calcul différentiel qu'on y trouve, présentent bien le résultat de ce Calcul, & la conclusion où l'on arrivera en le faisant, mais ils n'apprenent pas pour cela à le faire, & on ne le voit point naître & s'avancer depuis la première supposition, & dès l'état de la question jusques à ce que l'on ait trouvé ce que l'on cherche. (Crousaz, 1721: i)

A més a més, per assolir un resultat donat, el lector havia d'estar familiaritzat amb geometria i àlgebra, entre altres. Segons Crousaz, si L'Hospital hagués inclòs algunes referències, podria haver guiat millor el lector de l'*Analyse*, i per això creu necessari aconsellar el lector i afegir addicions i remarques a l'*Analyse* «pour le rendre plus intelligible» (Crousaz, 1721: 4). Si bé L'Hospital semblava adreçar-se als *savants*, en canvi Crousaz afirmava: «j'ai mieux aimé que les Sçavans trouvassent du superflu dans mon Ouvrage, que de donner lieu aux Commençans de se plaindre, que le nécessaire y manquoit» (Crousaz, 1721: xxii). És, precisament, el seu interès per arribar als principiants allò que Bernard-Joseph Saurin (1706-1781) destacà a la seva «approbation» del comentari de Crousaz:

on ne sçauroit trop le louer de n'avoir pas dédaigné dans celui-cy [cet ouvrage] de descendre jusqu'aux plus petits détails, & aux difficultés les plus légères, pour faciliter aux commençans l'intelligence de l'excellent traité qu'il commente. (Crousaz, 1721, Approbation)

#### 4. 'Un nouveau commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet ouvrage' de Paulian (1768)

L'autor del tercer comentari que estudiarem, el jesuïta Aimé-Henri Paulian, fou professor de física a diversos *collèges* jesuïtes francesos (Taton, 1986: 38, 44, 49). Va elaborar i publicar diverses obres sobre física, de les quals destaquen el *Dictionnaire de physique* (1761), que es va editar almenys nou vegades, i *Traité de paix entre Descartes et Newton* (1764). Pel que fa a les matemàtiques, i en particular al seu ensenyament, Paulian publicà el 1765 la *Guide des jeunes mathématiciens*, un comentari sobre l'edició de 1764 de les *Leçons élémentaires de mathématiques* de Nicolas-Louis de La Caille (1713-1762). La primera edició de l'obra de La Caille (1741) contenia únicament geometria i àlgebra; però a partir de la quarta edició (1756) s'hi van afegir els fonaments de càlcul diferencial i integral. El 1768 apareix un nou comentari sobre l'*Analyse des infiniment petits*, amb la tercera edició, «Par l'auteur du *Guide des jeunes mathématiciens* dans l'étude des *Leçons de Mathématiques* de M. l'Abbé de la Caille», és a dir, Paulian.

Al començament del seu prefaci Paulian explica que a L'Hospital se li retreu «n'avoir écrit que pour les Sçavans» (Paulian, 1768: ij). L'objectiu principal de Paulian és ajudar «les Commençans à se passer de guide dans la route épineuse du calcul différentiel» (Paulian, 1768: vj-vij). Com ja havia fet Crousaz, Paulian critica L'Hospital per presentar les regles del càlcul de manera massa concisa (Paulian, 1768: vij-viiij). En general, Paulian valorava positivament les contribucions de Varignon i de Crousaz (Paulian, 1768: xiiij). Segons Paulian, Varignon havia intentat aclarir només aquells aspectes

que li havien costat d'entendre i els seus *Éclaircissemens* no eren adients per a un principiant (Paulian, 1768: v). El comentari de Paulian conté referències sobre allò que es podia considerar com a coneixements previs necessaris per a l'estudi de l'*Analyse des infiniments petits*: aritmètica ordinària i algebrica, anàlisi o ciència de les equacions, geometria especulativa i pràctica i trigonometria (Paulian, 1768: xiv). En particular, Paulian sovint esmenta els elements d'àlgebra i geometria de M. L'Abbé de la Caille i el seu propi comentari *Guide des jeunes Mathématiciens*.

## 5. La diferenciació del producte

Examinar les justificacions de la regla de la diferenciació del producte és interessant ja que en les explicacions es mostra de quina manera es tracta amb quantitats infinitament petites. L'Hospital començava la secció I de l'*Analyse* amb les definicions següents:

DÉFINITION I: On appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement; & au contraire quantités *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. (L'Hospital, 1696: 2)

DÉFINITION II: La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la *Différence*. (L'Hospital, 1696: 3)

A continuació, L'Hospital enuncia la primera demanda o suposició, de la qual afirma que no cal demostració (fig. 1):

I. DEMANDE OU SUPPOSITION. On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande par exemple qu'on puisse prendre  $Ap$  pour  $AP$ ,  $pm$  pour  $PM$ , l'espace  $Apm$  pour l'espace  $APM$ , le petit espace  $MPpm$  pour le petit rectangle  $MPpR$ , le petit secteur  $AMm$  pour le petit triangle  $AMS$ , l'angle  $pAm$  pour l'angle  $PAM$ , &c. (L'Hospital, 1696: art. 2)

L'Hospital es recolza en aquesta primera demanda per formular la regla de diferenciació del producte de  $xy$  (L'Hospital, 1696: art. 5). Si la quantitat  $x$  creix i esdevé  $x + dx$ , la quantitat  $y$  esdevé  $y + dy$ , i la diferència del producte és  $ydx + xdy + dx dy$ . Si es divideix  $ydx$  i  $dx dy$  per  $dx$ , resulta  $y$  i  $dy$ , respectivament. Com que  $dy$  és infinitament menor que  $y$ , aleshores el terme  $dx dy$  es pot negligir perquè és infinitament menor que  $ydx$  i que  $xdy$ . I la diferència del producte és  $ydx + xdy$ .

En els seus *Éclaircissemens*, Varignon, per precisar la definició de diferència de L'Hospital com a «porció infinitament petita en què una quantitat variable augmenta o disminueix contínuament», incorpora la idea de «l'augment o disminució instantània del seu valor» inspirada probablement de la mecànica. És obvi ja que gran part de les aplicacions que Varignon fa del càlcul són per resoldre problemes físicomatemàtics, com els seus *mémoires* acadèmics ho demostren. Pel que fa a la primera demanda, Varignon l'escriu de manera similar a L'Hospital però incorporant la idea de canvi indefinidament petit o nul: «Mutatio indefinite parva, mutatio nulla» (Varignon, 1725: 2).

I a continuació Varignon afegeix una demanda suplementària (absent a l'*Analyse*) que «Tout produit qui résulte d'une quantité indéfiniment petite par une autre quantité indéfiniment petite, est

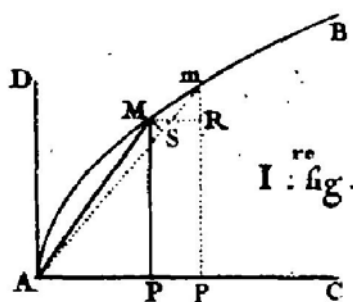


FIGURA 1. Figura 1 de L'Hospital (1696)

nul» (Varignon, 1725: 2), i aquí s'ha d'entendre «nul» en sentit relatiu. Així, quan justifica la regla de diferenciació del producte  $axy$ , el terme  $dx dy$  és nul (Varignon, 1725: 5).

En relació amb la primera demanda, Crousaz ha explicat en el primer discurs que per quantitat infinitament petita s'ha d'entendre «une partie aussi petite que l'on veut et que le besoin qu'on en a le demande» (Crousaz, 1721: 4), i també en quin sentit es pot negligir una quantitat relativament a una altra: «le terme d'infiniment petit n'est pas absolu, mais un terme relatif & de comparaison» (Crousaz, 1721: 3). Fa servir moltes comparacions per a explicar el sentit relatiu dels infinitament petits:

Le diamètre de la Terre est d'environ 3000 lieuës, celui du tour annuel qu'elle fait autour du Soleil est 12000 fois plus grand: cette étendue néanmoins est peut être plus petite en comparaison de la distance qu'il y a du Soleil jusqu'à quelques étoiles fixes, qu'un homme ne l'est à l'égard de toute la Terre. (Crousaz, 1721: 4)

Trobem comparacions semblants al text de Paulian, per fer entendre la primera demanda (Paulian, 1768, Note I: 257). Totes aquestes comparacions Paulian diu haver-les tret del curs de matemàtiques de Christian Wolff (1679-1754) (Wolff, 1713-1715, vol. I: 418).

I tots dos autors justifiquen de manera geomètrica, a partir de la figura del «rectangle», per què  $dx dy$  es pot negligir. Paulian (1768, Note II: 260), de manera semblant a Crousaz (1721: 21) (fig. 2a), afirma que els rectangles infinitament petits  $CDop$  ( $y dx$ ) i  $BmDn$  ( $x dy$ ) són infinitament més grans que el rectangle  $Dnpr$  o  $dx dy$  (fig. 2b). Com abans, Wolff (1713-1715, vol. I: 419) ja havia utilitzat el recurs del rectangle per explicar la diferència del producte.

## 6. Algunes reflexions finals

L'estudi dels prefacs dels comentaris de Crousaz i de Paulian permet copsar com s'havia d'ensenyar el càlcul als principiants, en oposició als *Éclaircissements* de Varignon, amb clarificacions més aviat per als *savants*. Aquesta dicotomia principiant-*savant* queda palesa en la manera com Crousaz i Paulian utilitzen figures geomètriques i exemples del món físic com a recurs per a explicar els elements i definicions de l'*Analyse*. En un moment en què diversos debats sobre la naturalesa dels infinitament petits ja havien tingut lloc, Crousaz i Paulian apostaren per arguments ja superats, ja debatuts, fins i tot potser poc rigorosos, però que, en ser més visuals i més intuïtius, podien resultar útils per a en-

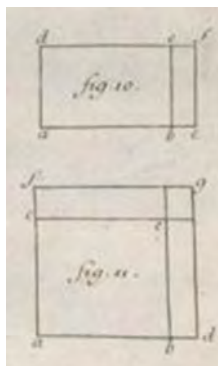


FIGURA 2a. Figura 11 de Crousaz (1721)

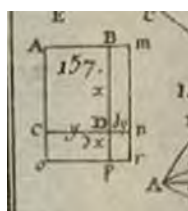


FIGURA 2b. Figura 157 de Paulian (1768)

senyar el càlcul. Així doncs, l'anàlisi comparativa d'altres conceptes, com les diferències d'ordre superior, les tangents i la determinació de màxims i mínims, podrà aportar llum sobre quina era la pedagogia «acceptada» del càlcul que els comentaris de l'*Analyse* presenten.

### Agraïments

Aquesta investigació compta amb el suport del projecte HAR2016-75871-R i el GDR 3398.

## Referències bibliogràfiques

BELLA, S. (2013), «L'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes: ouvrage de recherche ou d'enseignement?». A: BARBIN, E.; MOYON, M. (ed.), *Les ouvrages de Mathématiques dans l'Histoire*, Limoges, PULIM, 73-85.

BLANCO, M. (2008), «On how Johann Bernoulli's lessons on differential calculus were communicated in eighteenth-century France and Italy». A: SIMON, J.; HERRAN, N., amb LANUZA-NAVARRO, T.; RUIZ-CASTELL, P.; GUILLEM-LLOBAT, X. (ed.), *Beyond Borders: Fresh Perspectives in History of Science*, Cambridge, Cambridge Scholars Press, 113-140.

CROUSAZ, J. P. (1721), *Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits*, Paris, Chez Montalant.

KAISER, D. (2005), «Training and the Generalist's Vision in the History of Science», *Isis*, 96, 244-251.

L'HOSPITAL, G. F. A. de (1696), *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris, Imprimerie Royale.

PAULIAN, A. H. (1768), *Analyse des infiniment petits, suivie d'un nouveau commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet ouvrage*, Avignon, Chez la Veuve Girard et François Seguin.

ROBINET, A. (1960), «Le groupe malebranchiste introducteur du Calcul infinitésimal en France», *Revue d'Histoire des Sciences*, XIII, 287-308.

TATON, R. (ed.) (1986), *Enseignement et diffusion des sciences en France au dix-huitième siècle*, Paris, Hermann.

VARIGNON, P. (1725), *Éclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits*, Paris, Chez Rollin.

WOLFF, C. (1713-1715), *Elementa Matheseos Univer-sae*, IV vol., Halle (edició de 1732).